

一类 NMIFS 吸引子的递归计算构造及特性分析^{*}

王兴元 刘 波

大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116024

摘要 给出了 NMIFS (nonlinear markov iterated function system) 理论与构造 NMIFS 吸引子的方法, 讨论了一类 NMIFS 吸引子的平衡向量测度和“矩”的递归计算, 分析了 NMIFS 吸引子的结构特征. 研究表明: 对于 MIFS, 可以通过递归方法来计算矩 $\hat{M}^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots$); 而对于 NMIFS, 因 $\hat{M}^{(i)}$ 的计算依赖于 $\hat{M}^{(j)}$ ($j \geq i$), 故不能直接计算 $\hat{M}^{(i)}$, 而只能计算其近似值.

关键词 NMIFS 吸引子 递归计算 平衡向量测度 矩

数学上最早用 IFS 来构造和研究分形集的是 Hutchinson^[1], 其完整理论是 Barnsley^[2,3] 等建立的. 目前人们对 IFS 吸引子已进行了深入研究, 丰富了分形理论^[4~6]. 1982 年, Dekking 提出了 MIFS^[7], 此后 Barnsley, Elton, Grigorescu, Lasota, Stenflo 和 Smith 等在这方面做了大量的工作^[8~14]; 其中讨论得最多的是平衡向量测度、矩 (moment)、Hausdorff-Besicovitch 维数、遍历理论、动力系统. 1991 年后, Vrscay 和作者曾先后研究了 NIFS 吸引子^[4,15]. 为此, 本文将 Dekking, Barnsley 等的工作进行了推广, 讨论了一类 NMIFS 吸引子的平衡向量测度和矩的递归计算, 分析了 NMIFS 吸引子的结构特征.

1 理论与方法

Markov 性是俄国数学家 Markov 在 1906 年最早提出的. 从朴素的 Markov 性, 到抽象出 Markov 过程的概念, 经历了几十年的发展过程^[16]. 目前, Markov 过程的理论在近代物理、生物学、管理科学、信息处理及数字计算方法等方面都有很重要应用^[17~19].

定义 1 设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的状态空间为

I . 如果对时间 t 的任意 n 个数值 $t_1 < t_2 < \dots < t_n, n \geq 3, t_i \in T$, 在条件 $X(t_i) = x_i, x_i \in I, i=1, 2, \dots, n-1$ 下, $X(t_n)$ 的条件分布函数恰好等于在条件 $X(t_{n-1}) = x_{n-1}$ 下 $X(t_n)$ 的条件分布函数, 即

$$P\{X(t_n) \geq x_n \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} = P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}, x_n \in R$$

或写成

$$F_{t_n \mid t_1 \dots t_{n-1}}(x_n, t_n \mid x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = F_{t_n \mid t_{n-1}}(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}),$$

则称过程 $\{X(t), t \in T\}$ 具有 Markov 性, 或称此过程为 Markov 过程.

若 (X, ρ) 是度量空间, $F(X)$ 表示 X 的非空紧子集 $S = (S_1, \dots, S_N)$ 的集合, 其中 $S_i \subset w_i(X)$, 则 $F(X)$ 是度量

$$h_\rho(A, B) = \max_i h(A_i, B_i)$$

的完备度量空间. 上式中 $h(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B}$

2003-12-03 收稿, 2004-02-24 收修改稿

国家自然科学基金(批准号: 69974008), 中国博士后科学基金及辽宁省自然科学基金(批准号: 972194)资助项目

$d(x, y) + \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} d(x, y)$ 是 Hausdorff 距离, 其中 $d(x, y) = \|x - y\|$.

定义 2 一个双曲 NMIFS 由一族 (X, ρ) 上的有限个压缩映射 $w = (w_i; i = 1, 2, \dots, N)$ 组成, 令

$$w_i(x) = a_i x^n + b_i, \quad (1)$$

式中 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} , n 为正整数且 $n \neq 1$. 若对每个 $w_i: X \rightarrow X$, 都有

$$\|w_i(x) - w_i(y)\| \leq c_i \|x - y\| (\forall x, y \in X),$$

这里 $0 \leq c_i < 1$, 则称 $c = \max_{1 \leq i \leq N} \{c_i\}$ 为此双曲 NMIFS 的压缩比. 若一个 Markov 转移概率矩阵 $P = [p_{ij}]_{N \times N}$ 满足

$$p_{ij} \geq 0 (i, j = 1, 2, \dots, N) \text{ 和} \\ \sum_{j=1}^N p_{ij} = 1 (i = 1, 2, \dots, N),$$

(上式整数 $1, 2, \dots, N$ 可称为“状态”)则称 $\{X, w, P\}$ 是一个 NMIFS.

定理 1 对于复映射 $T(z) = a \circ z^n + b$, 若令 $D(r, z_0)$ 表示复 \mathbb{C} 平面上原点为 z_0 , 半径为 $r = \sqrt[n-1]{1/n \|a\|}$ 的开圆盘, 则有

- (1) $T(z)$ 是 $D(r, 0)$ 上的一个压缩映射;
- (2) 如果 $\|a\| \circ r^n + \|b\| \leq r$, 则 $T(D(r, 0)) \subset D(r, 0)$, 并且有

$$\|b\| \leq \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{(n \|a\|)^{1/(n-1)}}. \quad (2)$$

证明: 因 $\frac{d}{dz} T(z) = n \circ a \circ z^{n-1}$, 故 $\|z\|^{n-1} < \frac{1}{n \|a\|}$ 时, $T(z)$ 是压缩映射. 用 $D(r, 0)$ 的半径 r 代替 $\|z\|$ 得 $r = \sqrt[n-1]{1/n \|a\|}$.

因为 $T(D(r, 0)) = D(\|a\| \circ r^n, b) \subset D(\|a\| \circ r^n + \|b\|, 0)$, 故 $\|a\| \circ r^n + \|b\| \leq r$ 时, 有 $T(D(r, 0)) \subset D(r, 0)$, 将 $r = \sqrt[n-1]{1/n \|a\|}$ 代入 $\|a\| \circ r^n + \|b\| \leq r$ 中, 求出 $\|b\|$ 即得(2)式.

定理 2 对于一个 NIFS $\{T_i(z), i = 1, \dots, N\}$, $T_i(z) = a_i z^n + b_i$, 若

$$\|a_{\max}\| \circ r_{\min}^n + \|b_{\max}\| \leq r_{\min} \quad (3)$$

成立, 则 $\{T_i(z), i = 1, \dots, N\}$ 是 $D(r_{\min}, 0)$ 上的双曲 NIFS, 这里 $r_{\min} = \min\{r_1, \dots, r_N\}$ 且 $r_i < 1$.

证明: 因为 $T_m(D(r_i, 0)) \subset D(\|a_m\| \circ r_i^n + \|b_m\|, 0)$, 当 $r_i < 1$ 时, 如果式(3)成立, 则

$$T_m(D(r_i, 0)) \subset D(r_{\min}, 0) (1 \leq i, m \leq N),$$

故命题真.

在 $\|a_m\| = A, \|b_m\| = B$ 且 $n_m = n$ 的特殊情况下, 由 $r = \sqrt[n-1]{1/n \|a\|}$ 知 $r_m = r$, (3)式可简化为

$$A \circ r^n + B \leq r. \quad (4)$$

将 $r = \sqrt[n-1]{1/n \|a\|}$ 代入(4)式消去 r , 可获得 A 与 B 的关系如下:

$$n < 1 \text{ 时, } A \geq \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \circ \frac{1}{B^{n-1}}; n > 1 \text{ 时,} \\ A < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \circ \frac{1}{B^{n-1}}.$$

定理 3 设 $\{X, w, P\}$ 是完备度量空间 (X, ρ) 上的双曲 NMIFS, 压缩比为 c . 由 $W(B) = S$, 定义变换 $W: F(X) \rightarrow F(X)$, 这里

$$S_j = \bigcup_{i, p_{ij} \neq 0} w_j(B_i),$$

则 W 是 $(F(X), h_\rho)$ 上压缩比为 c 的压缩映射, 即

$$h_\rho(W(B), W(C)) \leq c h_\rho(B, C) \\ (\forall B, C \in F(X)),$$

且存在唯一的不动点(不变集) $A = (A_1, \dots, A_N)$ 且 $A \in F(X)$, 满足:

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A),$$

并且对任意 $\forall B \in F(X)$,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B).$$

证明 由(1)式有

$$h_\rho(W(B), W(C)) =$$

$$\max_j h \left[\bigcup_{i, p_{ij} \neq 0} w_j(B_i), \bigcup_{i, p_{ij} \neq 0} w_j(C_i) \right].$$

显然

$$h(\bigcup_k B_k, \bigcup_k C_k) \leq \max_k h(B_k, C_k).$$

因此

$$h_\rho(W(B), W(C)) \leq \max_j \max_{i, p_{ij} \neq 0} h(w_j(B_i), w_j(C_i)) \leq c \max_i h(B_i, C_i) \leq ch_\rho(B, C). \quad (5)$$

由(5)式知: 如果 $W(A) = A, W(B) = B$, 则 A, B 都是不变集. 当 $h_\rho(A, B) = 0$ 时, 意味着 $A = B$, 即不变集是惟一的. 又因为

$$h_\rho(W(B), A) = h_\rho(W(B), W(A)) \leq ch_\rho(B, A) \quad (\forall B \in F(X)),$$

使得

$$h_\rho(W^n(B), A) \leq c^n h_\rho(B, A),$$

故 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$, 证毕.

定理 3 中的不动点 A 称为这个 NMIFS 的吸引子. NMIFS 的吸引子一般都是分形, 称为确定性分形. 利用定理 3 可以建立绘制 NMIFS 吸引子的算法: 设 $\{X, w, P\}$ 是一个双曲的 NMIFS, 其中 $w = (w_i : i = 1, 2, \dots, N)$, $P = [p_{ij}]_{N \times N}$, 为 Markov 转移概率矩阵. 首先选取初始点 $x_0 \in X$ 和状态 $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$, 然后从 $\{w_i : p_{i_0 i} > 0\}$ 中随机选取映射 w_{i_1} (w_{i_1} 所伴随的概率为 $p_{i_0 i_1}$) 来作用点 x_0 , 得到点 $x_1 = w_{i_1}(x_0)$, 此时进入状态 i_1 . 接下来, 按上述方法选取 w_{i_2} (其所伴随的概率为 $p_{i_1 i_2} > 0$), 得到 $x_2 = w_{i_2}(x_1)$. 这个过程重复进行, 从而得到一个点序列 $\{x_m\}$. 选取充分大的整数

M_{\max} , 则序列 $\{x_m, m \geq M_{\max}\}$ 收敛于 NMIFS 的吸引子 A . 利用计算机绘制吸引子 A 的图像, 当迭代次数 m 达到一定值时, 由于计算机屏幕的图像分辨率限制, 再增加迭代次数并不能明显改变图像效果. 那么此时所得的分形集 E 与 NMIFS 吸引子 A 的差别是多少? 下面的拼贴定理对这个问题给出了 Hausdorff 测度意义下的估计.

定理 4 设 (X, ρ) 是完备度量空间, $\{X, w, P\}$ 是压缩比为 c 双曲的 NMIFS, 其中 $w = (w_i : i = 1, 2, \dots, N)$, 它的不动点(不变集)是 A , 则

$$h_\rho(E, A) \leq (1 - c)^{-1} h_\rho \left[E, \bigcup_{n=1}^N w_n(E) \right] \quad (\forall E \in F(X)). \quad (6)$$

证明 由于 A 是不变集, 所以 $A = W(A)$.

$$\begin{aligned} \text{于是, } h_\rho(W(E), A) &= \max_j h \left[\bigcup_{i, p_{ij} \neq 0} w_j(E_i), \bigcup_{i, p_{ij} \neq 0} w_j(A_i) \right] \\ &\leq \max_j \max_{i, p_{ij} \neq 0} h(w_j(E_i), w_j(A_i)) \leq \\ &c \max_i h(E_i, A_i) \leq ch_\rho(E, A). \end{aligned}$$

由 Hausdorff 距离的三角不等式

$$\begin{aligned} h_\rho(E, A) &\leq h_\rho \left(E, \bigcup_{n=1}^N w_n(E) \right) + \\ &h_\rho \left(\bigcup_{n=1}^N w_n(E), A \right) \leq \\ &h_\rho \left(E, \bigcup_{n=1}^N w_n(E) \right) + \\ &ch_\rho(E, A), \end{aligned} \quad (7)$$

整理(7)式, 即可得(6)式.

拼贴定理保证了在计算机屏幕上, 来自于迭代 n 次 NMIFS 后的分形集 E 就是这个 NMIFS 的吸引子 A 的一种逼近. 这两个集合之间的 Hausdorff 距离, 可以用集合 E 与集合 E 的像之间的 Hausdorff 距离来估计. 因此, 拼贴定理提供了构造 NMIFS 吸引子的计算机逼近理论依据.

2 实验与结果

2.1 平衡向量测度

设 $\{X, w, P\}$ 是一个 NMIFS, $B \in B(X)$,

这里 $B(X)$ 是 X 的 Borel 子集. 每一个 NMIFS 都与惟一稳定概率测度 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ 相关, μ 的支撑是该 NMIFS 吸引子 A , 且对于 X 的所有 Borel 子集 B , 它满足^[3]

$$\mu(B) = \int_X P(x, B) d\mu(x),$$

其中离散 Markov 转移概率矩阵 $P = [p_{ij}]_{N \times N}$ 满足

$$p_{ij}(x, B) = p_{ij} \delta_{w_j(x)}(B),$$

这里 $p_{ij}(x, B)$ 是在映射 w_j 的作用下从 $x \in X$ 到 Borel 子集 B 的转换概率, 且对于某个 $y \in X$ 有 $x = w_i(y)$, 并这里

$$\delta(B) = \begin{cases} 1 & (z \in B) \\ 0 & (z \notin B) \end{cases}.$$

定理 5 对于 X 的所有 Borel 子集 B 存在一个概率测度 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ 满足

$$\begin{aligned} \mu_j(B) &= \sum_{i=1}^N p_{ij} \int_X \delta_{w_j(x)}(B) d\mu_i(x), \\ (j &= 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (8)$$

证明 在 Banach 空间中定义算子

$$(T_j f)(x) = \sum_{i=1}^N p_{ij} f(w_j(x)),$$

由 Schauder 不动点定理^[20] 可知伴随算子 T^* 有一个不动点 μ_j . 又因为

$$\begin{aligned} (T_j^* v)(B) &= \sum_{i=1}^N p_{ij} (w_j^\# \circ v)(B) = \\ &= \sum_{i=1}^N p_{ij} \int_X \delta_{w_j(x)}(B) dv(x), \end{aligned}$$

这里 $(w_j^\# \circ v)(B) = v(w_i^{-1}(B))$, 则不动点 μ_j 满足

$$\begin{aligned} \mu_j(B) &= \sum_{i=1}^N p_{ij} \int_X \delta_{w_j(x)}(B) d\mu_j(x) = \\ &= \int_X P(x, B) d\mu_j(x). \end{aligned}$$

定义 3 (8)式定义的 概率测度 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ 称为 $\{X, w, P\}$ 的平衡向量测度.

2.2 矩的递归计算

若 $\{X, w, P\}$ 是 R^d 上的双曲 MIFS, 吸引子为 A , 则以 Lebesgue 积分来定义其相关的不变测度为^[3]

$$g_m = \int_A x^m d\mu. \quad (9)$$

为方便起见, 设测度是规一化的, 即 $g_m = \int_A d\mu = 1$.

由(8)式可知: 若 $C(X)$ 表示 X 上的连续函数空间, 当 $f \in C(X)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_C f(z) d\mu_i(z) &= \sum_{j=1}^N p_{ji} \int_C f(w_j(z)) d\mu_j(z), \\ (j &= 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (10)$$

定义第 m 个矩 $\hat{M}^{(m)}$ 为

$$\begin{aligned} \hat{M}^{(m)} &= (g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, \dots, g_N^{(m)}) = \\ &= (M_1^{(m)}, M_2^{(m)}, \dots, M_N^{(m)}). \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式中

$$g_i^{(m)} = M_i^{(m)} = \int_C z^m d\mu_i(z),$$

并且, 由(10)式可得

$$M_i^{(m)} = \sum_{j=1}^N p_{ji} \int_C (w_j(z))^m d\mu_j(z).$$

对于(1)式, 则有

$$M_i^{(m)} = \sum_{j=1}^N p_{ji} \int_C (aiz^n + b_i)^m d\mu_j(z). \quad (12)$$

当 $n=1$ 时, (12)式变为

$$M_i^{(m)} = \sum_{j=1}^N p_{ji} \int_C (aiz + b_i)^m d\mu_j(z),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N). \quad (13)$$

定理 6 设 $\{X, w, P\}$ 是一个 MIFS, X 是 C 的非空紧子集, $w_i = az + b_i (i = 1, 2, \dots, N)$. 定义矩阵 $A^{(m, k)}$ 为

$$A^{(m, k)} = [a_{ij}^{(m, k)}] = \left[\binom{m}{k} p_{ji} a_i^k b_i^{m-k} \right],$$

$$(m = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, m),$$

则给定 $\hat{M}^{(0)}$, 矩 $\hat{M}^{(m)}$ 可以由下式来递归计算

$$(I - A^{(m, m)}) \hat{M}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} A^{(m, k)} \hat{M}^{(k)}. \quad (14)$$

证明 由(13)式有

$$M_i^{(m)} = \sum_{j=1}^N p_{ji} \sum_{k=0}^m a_i^k b_i^{m-k} \binom{m}{k} \int_C z^k d\mu_j(z) =$$

$$\sum_{k=0}^m \left[\sum_{j=1}^N \binom{m}{k} p_{ji} a_i^k b_i^{m-k} \right] M_j^{(k)} =$$

$$\sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(m, k)} M_j^{(k)},$$

若用矩阵形式表示, 则

$$\hat{M}^{(m)} = \sum_{k=0}^m A^{(m, k)} \hat{M}^{(k)},$$

由此可知(14)式成立.

当 $n \neq 1$ 时, 由(9), (10)式有

$$g_i^m = \sum_{j=1}^d p_{ji} \int_A (az^n + b_i)^m d\mu_j(z), \quad (15)$$

设 $g_i^{(0)} = 1$, 当 $n = 1, 2, 3$ 时, 则有

$$g_i^{(1)} = g_i^{(n)} \sum_j p_{ji} a_i + \sum_j p_{ji} b_i, \quad (16)$$

$$g_i^{(2)} = g_i^{(2n)} \sum_j p_{ji} a_i^2 + 2g_i^{(n)} \sum_j p_{ji} a_i b_i + \sum_j p_{ji} b_i^2, \quad (17)$$

$$g_i^{(3)} = g_i^{(3n)} \sum_j p_{ji} a_i^3 + 3g_i^{(2n)} \sum_j p_{ji} a_i^2 b_i +$$

$$3g_i^{(n)} \sum_j p_{ji} a_i b_i^2 + \sum_j p_{ji} b_i^3. \quad (18)$$

μ 若定义矩阵 $A^{(s, t)} = [a_{ij}^s b_i^t] = \sum_i \sum_j p_{ji} a_i^s b_i^t (i, j = 1, 2, \dots, d)$, 则(16)~(18)式可写为

$$g^{(1)} = A^{(0,0)} g^{(n)} + A^{(0,1)}, \quad (19)$$

$$g^{(2)} = A^{(2,0)} g^{(2n)} + 2A^{(1,1)} g^{(n)} + A^{(0,2)}, \quad (20)$$

$$g^{(3)} = A^{(3,0)} g^{(3n)} + 3A^{(2,1)} g^{(2n)} +$$

$$3A^{(1,2)} g^{(n)} + A^{(0,3)}, \quad (21)$$

(19)~(21)式并不具备递归计算矩的条件. 实际上, 由(15)式我们有

$$g_i^{(m)} = \sum_{j=1}^d p_{ji} \int_A (az^n + b_i)^m d\mu_j(z) =$$

$$\sum_{j=1}^d p_{ji} \int_A \binom{m}{k} a_i^k z^{kn} b_i^{m-k} d\mu_j(z) =$$

$$\sum_{j=1}^d p_{ji} \binom{m}{k} a_i^k b_i^{m-k} \int_A z^{kn} d\mu_j(z),$$

即

$$g^{(m)} = \binom{m}{k} A^{(k, m-k)} g^{(kn)}. \quad (22)$$

由(22)式可以看出: 每一个 m 都引入了新的矩 g_i^k 或 $g^{(k)}$, 其中 $m+1 \leq k \leq mn$, 所以不能通过递归来计算矩. 经过分析可知

$$g^{(p)} = G(g^{(1)}, \dots, g^{(m)}),$$

$$(m = 1, 2, \dots, [p/n] \text{ 且 } m \text{ 不是 } n \text{ 的倍数}), \quad (23)$$

这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分, (23)式表示 $g^{(p)}$ 是 $g^{(1)}, \dots, g^{(m)}$ 的线性组合. 按文献[15], 可称这些未知的矩 $g^{(i)} (i = 1, 2, \dots)$ 为“未知矩”, 下面我们来计算这些未知矩的近似值.

定理 7^[21] 设 $g^{(n)} (n = 0, 1, 2, \dots)$ 是一实数序列, 则在 $[0, 1]$ 上存在惟一不变测度 μ , 使下式

$$g^{(n)} = \int_0^1 z^n d\mu$$

成立的充要条件是 $g^{(n)}$ 满足 Hausdorff 不等式(当且仅当测度 μ 包含点 $z = 0$ 和/或 1 时, 等式成立)

$$I(m, n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k g^{(m+k)} \geq 0,$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots). \quad (24)$$

定理 7 表明 $g^{(n)} (n=0, 1, 2, \dots)$ 是递减的.

我们只考虑 $n (n > 0)$ 个未知矩. 以 \hat{x} 来表示这些未知矩, 其形式为

$$\hat{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)})^T = (g^{(1)}, \dots, g^{(m)})^T.$$

对于(1)式, 这个向量定义了惟一矩序列 $K_j (j=0, 1, \dots, nm)$.

例 1 考虑 NMIFS

$$w_1(x) = \frac{1}{2}x^2, w_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2},$$

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

由上述方法, 经计算可知所有偶数矩可由奇数矩来表示. 现求出开始的几个偶数矩为:

$$g^{(2)} = g^{(1)} - \frac{1}{4}, g^{(4)} = \frac{3}{2}g^{(1)} - \frac{5}{8},$$

$$g^{(6)} = 4g^{(3)} - \frac{15}{8}g^{(1)} + \frac{13}{32},$$

$$g^{(8)} = -4g^{(3)} + \frac{85}{8}g^{(1)} + \frac{143}{32}.$$

表 1 列出了相应的 $I(m, n)$, 其中 $0 \leq m \leq 3, 1 \leq n \leq 4$. 由定理 7 可知 $g^{(1)} > g^{(2)} > g^{(4)}$, 通过简单的计算可知

$$\frac{5}{12} < g^{(1)} < \frac{3}{4}. \quad (25)$$

由(24), (25)式和表 1, 我们可以计算 $g^{(i)} (i=1, 2, \dots, 8)$ 的上、下限.

由 Bessis 和 Demko 对吸引子 A 上的 $\int \sqrt{x} d\mu$ 的计算^[22], 有

$$T^{(n)} f(x) \rightarrow \int f d\mu_i \quad x \in \mu_i \quad (26)$$

成立, 由(26)式即可得出 $g^{(2k-1)} (k=1, 2, \dots)$ 较精确的估计值. (26)式中的 μ 是 NMIFS $\{X, w, P\}$ 上的不变测度; 操作子 $T: C(X) \rightarrow C(X)$ 是由

$$T(f)(x) = \sum_i \sum_{j=1}^N p_{ij} (f \circ w_j)(x) \quad (27)$$

表 1 用 $g^{(1)}$ 和 $g^{(3)}$ 表示的(13)式的 Hausdorff 不等式 $I(m, n)$

m	I(m, n)			
	n=1	n=2	n=3	n=4
1	$1 - g^{(1)}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 3g^{(1)} - g^{(3)}$	$-4 + 14g^{(1)} - 4g^{(3)}$
2(a)	$\frac{1}{2} g^{(1)}$	$1 - 3g^{(1)} + g^{(3)}$	$-\frac{7}{2} - 11g^{(1)} + 3g^{(3)}$	
3(a)	$-\frac{1}{2} + 2g^{(1)}$	$-\frac{5}{2} + 8g^{(1)}$		
3(a)	$-g^{(3)}$	$-2g^{(3)}$		
3(a)	$2 - 6g^{(1)} + g^{(3)}$			

给定的, 其中 $C(X)$ 表示 X 上的连续函数空间, 则由(12)式可得

$$T^{(n)} f(x) = \sum_i \dots \sum_i \left[\sum_{j_1=1}^N \dots \sum_{j_n=1}^N p_{ij_1} \dots p_{ij_n} f(w_{j_1} \circ \dots \circ w_{j_n})(x) \right]. \quad (28)$$

取 $f(x) = x^{2k-1}$, 则利用上式计算 $g^{(2k-1)}$ 可达到比较高的精度.

2.3 一类 NMIFS 吸引子的构造

根据构造 NMIFS 吸引子的算法, 按(1)式选择合适的 $w = (w_i : i=1, 2, \dots, N)$, 如

$$w = \left[\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}, \frac{i}{2}z^2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{5}i, -\frac{i}{2}z^2 + \frac{i}{2} \right], \quad (29)$$

$$w = \left[\frac{3}{5}z^2, \frac{3i}{5}z^2 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right], \quad (30)$$

$$w = \left[-\frac{i}{2}z^2, \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}z^2 + \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}z^2 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right], \quad (31)$$

和转移概率矩阵 P (如表 2 所示, 其中 P 与矩阵 M 的关系为: $P_{ij} = m_{ij}/n_i, n_i = \sum_{j=1}^4 m_{ij}$), 计算时 (1) 式最初的 1000 次迭代被抛弃, 以保证系统的轨道已收敛到吸引子上, 然后再利用式 (1) 迭代 500000 次, 作者绘制出许多复杂而有趣的 NMIFS 吸引子. 图 1~3 是较有代表性的几例.

观察图 1~3, 可见同一双曲 NMIFS, 只要使用的转移概率矩阵不同, 那么所得到 NMIFS 吸引子也是各不相同的. 另外, 还可建立双曲 NMIFS 吸引子与参数的连续依赖关系: 对双曲 NMIFS, 参数的微小变化会引起相应吸引子的结构发生微小变化. 这是非常重要的, 因为在图像资料信息的压缩中, 我们可以调整参数达到连续控制 NMIFS 吸引子的目的, 同时也使我们能平滑地在吸引子间插值, 这对图像的计算机模拟也是相当有用的.

表 2 NMIFS 的转移概率矩阵 $M = (m_{ij})_{4 \times 4}$

图序号	M			
	(a)	(b)	(c)	(d)
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	2	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

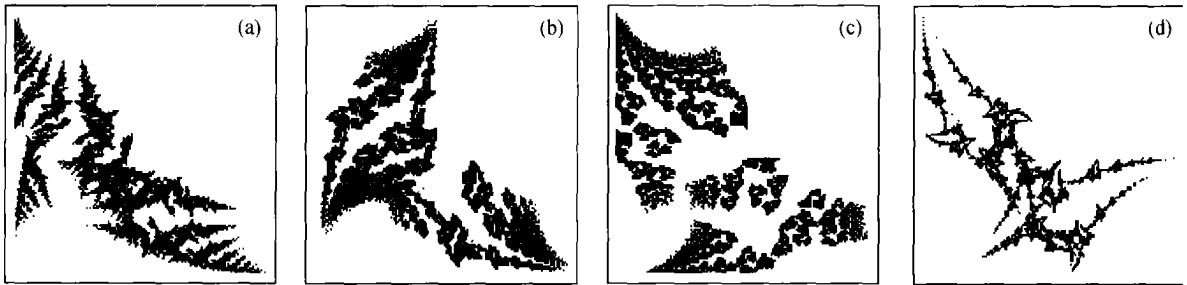


图 1 (29) 式的 NMIFS 吸引子

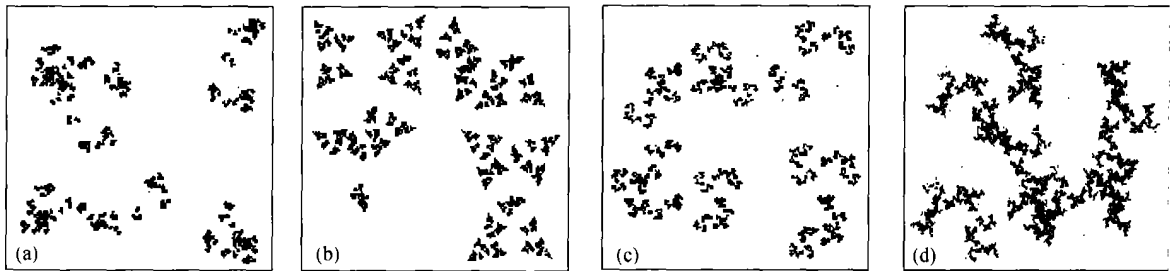


图 2 (30) 式的 NMIFS 吸引子

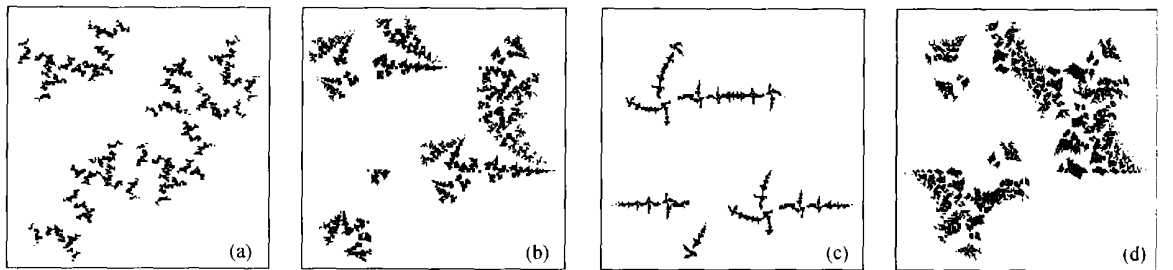


图 3 (31) 式的 NMIFS 吸引子

3 结论

(1) 本文讨论了 NMIFS 理论、平衡向量测度、矩的计算并构造了 NMIFS 吸引子。MIFS 的主要思想是 IFS 所产生的轨道上的每一个点都与一个“状态”相关联，且状态变换是由 Markov 过程控制的。与 MIFS 相关联的平衡向量测度和矩常作为向量来对待，对矩的计算表明：对于 MIFS，可以通过递归来计算 $\hat{M}^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots$)；而对于 NMIFS，因 $\hat{M}^{(i)}$ 的计算依赖于 $\hat{M}^{(j)}$ ($j \geq i$)，故不能直接计算 $\hat{M}^{(i)}$ ，而只能计算其近似值。虽然本文给出的非线性映射仅为 $w_i(x) = a_i x^n + b_i$ ($i=1, 2, \dots, N$)，但易推广到更普遍的情形，如 $w_i(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + b_i$ ，故本文的结论和方法是具有普遍意义的。

(2) 从本研究还可以看出，由非线性压缩映射族及所伴随的转移概率矩阵组成的 NMIFS，只要很少的一些数据就可以产生极其复杂的集——分形吸引子。这意味着表象上巨大的数据量在某种映射下只要少量数据就可以表达出来，因此可把复杂的图像数据用一组能产生该图像的 NMIFS 来代替，只要记忆存储这组变换的参数。所以如何寻找到可以对给定的实物图像提供较好表现的 NMIFS，成为问题的关键。如果这些想法能实现，那么对复杂信息资料的压缩，对各种奇特图形的高效储存和传输就有极其重大的意义。

参 考 文 献

- Hutchinson J. Fractals and self-similarity. *University Journal of Mathematics* 1981, 30: 713
- Bamsley M F. *Fractals Everywhere*. Boston: Academic Press Professional, 1993. 15~40
- Bamsley M F, et al. Iterated function systems and the global construction of fractals. *The Proceedings of the Royal Society, London Ser*, 1985, A399: 243
- 王兴元. 广义 M-J 集的分形机理. 大连: 大连理工大学出版社, 2002, 75~120
- 王兴元, 等. IFS 吸引子的计算机模拟. *计算物理*, 2000, 17(3): 407
- Vrscay E R, et al. Iterated function systems and the inverse problem of fractal construction using moments. In: *Computers and Mathematics*. New York: Springer-Verlag, 1989. 250
- Dekking F M. Recurrent sets. *Adv In Math*, 1982, 44: 78
- Barnsley M F, et al. Invariant measures for Markov processes arising from iterated function systems with place-dependent probabilities. *Ann Inst H Poincaré Probab Statist*, 1988, 24: 367
- Elton J, et al. Approximation of measures by Markov processes and homogeneous affine iterated function systems. *Constr Approx*, 1989, 5: 69
- Grigorescu S. Limit theorems for Markov chains arising from iterated function systems. *Rev Roumania Math Pures Appl*, 1992, 37(10): 887
- Lasota A, et al. Lower bound technique for Markov operators and iterated function systems. *Random Comput Dynam*, 1994, 2(1): 41
- Stenflo Ö. Ergodic theorems for Markov chain represented by iterated function systems. *Bull Polish Acad Sci Math*, 2001, 49(1): 27
- Stenflo Ö. A note on a theorem of Karlin. *Statistics & Probability Letters*, 2001, 54: 183
- Smith J D H. Permutation representations of bops. *Journal of Algebra*, 2003, 264: 342
- Vrscay E R, et al. “Missing moment” and perturbative methods for polynomial iterated function systems. *Physica D*, 1991, 50: 478
- 胡迪鹤. *随机过程论——基础、理论、应用*. 武汉: 武汉大学出版社, 2000. 271~284
- Chung K L. *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. New York: Springer-Verlag, 1960. 34~72
- Ethier S N, et al. *Markov Processes: Characterization and Convergence*. New York: John Wiley & Sons, 1986. 25~44
- Meyn S P, et al. *Markov Chains and Stochastic Stability*. New York: Springer-Verlag, 1993. 38~64
- Massopust P R. *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets*. London: Academic Press Limited, 1994. 47~67
- Akhiezer N I. *The Classical Moment Problem*. New York: Hafner, 1965. 246~269
- Bessis D, et al. Stable recovery of fractal measures by polynomial sampling. *Physica D*, 1991, 47: 427